レポート問題

以下の２問について、プログラムを完成させて計算を行い正しい結果を得ているかどうか確かめなさい。

１．既約分数の割合

ユークリッドの互除法を用いて二つの最大公約数を求めるサブプログラムを作成し、十分大きな数 N 以下の二数が互いに素（1 以外に共通の約数を持たない）になる割合、η を求めなさい。正しい結果が得られたら実行時間を短くする方法を考えなさい。なお、この値は $\pi^2/6=0.60792710$ に収束することが知られている。なお、1 と 1 は互いに素である。なお、

N=1000　　　608383

N=10000　　 60794971

N=100000　　6079301507

である。

注１） 整数の倍精度実数への変換は DBLE()、倍精度整数の宣言は INTEGER(8)とすればよい。但し、N が 100000 以上になると計算時間が一時間では終わらないので注意を要する。

注２） 実行時間は

```
real time
call cpu_time(time)
```

で求めることができる。

２．重積分の計算（チェビシェフ多項式補間による）

n 倍角の公式、$T_n=\cos n\vartheta$ を $\cos\vartheta$ で表したものを考える。そのとき $\cos\vartheta$ を x で置き換えた多項式をチェビシェフ多項式という。このとき、閉区間 $[-1,1]$ で定義された関数 $f(x)$ の $T_{n+1}(x)$ の零点 $\zeta_0,\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,,$ を補間点とする補間多項式 $f_n(x)$ を $T_0(x),T_1(x),T_2(x),,$ で表し，$f(x)=\sum_{j=0}^{n}C_jT_j(x)$ とおく。このとき各係数 C_j は次の式で与えられる。

$$C_0=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}f(\zeta_k),\quad C_j=\frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n}f(\zeta_k)T_j(\zeta_k),(j=1,2,,)$$

$f_n(x)$を $f(x)$の n 次チェビシェフ補間多項式という。この多項式を利用して積分を行うと

$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} H_n(k) f(x_k)$ 、 こ こ で $\vartheta_k = \frac{2k+1}{2(n+1)}\pi$ 、 $\zeta_k = \cos\vartheta_k$ 、

$x_k = \frac{b-a}{2}\zeta_k + \frac{b+a}{2}$、 $H_n(k) = \frac{1}{n+1}\left\{1 - 2\sum_{j=1}^{[n/2]} \frac{\cos 2j\vartheta_k}{(2j)^2 - 1}\right\}$ と表される。

1） この公式を使って $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$ を求めよ。

2） 重積分 $I = \int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)dxdy$ は $F(x) = \int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)dy$ とおけば $I = \int_a^b F(x)dx$

となるから、 $\int_a^b F(x)dx \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} H_n(k)F(x_k)$、

ここで $F(x_j) = \int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)dy$ なので、

$F(x_j) = (q(x_j) - p(x_j))\sum_{k=0}^{n} H_n(k) f(x_j, y_k)$ により求めることができる。

$\iint_D \frac{4x}{\sqrt{x^2 - y^2}} dxdy$、 $D: 1 \le x \le 2, 0 \le y \le 0.5x$ を求めよ。

注１） 文関数は問題が多いので使用しないようにしましょう。

注２） 配列の添字野範囲を指定するには S(0:10) とすれば 0 から 10 までとなる。

注３） 円周率は 4.0D0*ATAN(1.0D0) で精度よく求めることができる。D は倍精度定数の指数部を表す。