

計算機数学（2008）レポート問題

問題 次の二つの代数方程式

$$1) \quad P(x) = x^7 + x^6 - 9x^5 + x^4 + 24x^3 - 26x^2 - 16x + 24 = 0$$

$$2) \quad P(x) = x^6 + 24x^3 + 196x^2 + 336x + 288 = 0$$

の解をベアストウ法によりすべて求めよ。(複素数解を含む)

ベアストウ法(Bairstow's method)による解法

いま、二次式 $x^2 + \alpha x + \beta$ で割り算を行ったとすると

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$= (x^2 + \alpha x + \beta)Q(x) + A(x + \alpha) + B$$

$$= (x^2 + \alpha x + \beta)(b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-3}x^{n-3} + \dots + b_1x + b_0) + A(x + \alpha) + B$$

となり、もし $A = B = 0$ とすることができれば、二次方程式の解の公式より、二つの解が得られる。そして、 $Q(x)$ に対して同様に考え 2 次以下になるまで計算すればすべての解を求めることができる。

実際の計算過程は次のようになる。

まず、 b_i を計算すると

$$b_n = b_{n-1} = 0$$

$$b_i = a_{i+2} - \alpha b_{i+1} - \beta b_{i+2} \quad (i = n-2, n-3, \dots, 0, -1, -2)$$

となり、 A, B はそれぞれ

$$A = b_{-1}$$

$$B = b_{-2}$$

と表すことができる。ここで、

$$A(\alpha, \beta) = 0$$

$$B(\alpha, \beta) = 0$$

となる α, β を求めるために二次元の Newton(-Raphson)法を用いる。(導出はレポート課題 2 で求める。) α, β に適切な初期値を与えて

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial \alpha} & \frac{\partial A}{\partial \beta} \\ \frac{\partial B}{\partial \alpha} & \frac{\partial B}{\partial \beta} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

α', β' を計算する。 α, β を α', β' の値で置き換え新しい推定値とし、計算を繰り返すと A, B の値が 0 に収束する。

実際の計算では適当なところで収束したとみなし、その時の二次方程式の解を求める。

ここで、 $\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial B}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta}, \frac{\partial B}{\partial \beta}$ は

$$c_n = c_{n-1} = 0$$

$$c_i = -b_{i+1} - \alpha c_{i+1} - \beta c_{i+2} \quad (i = n-2, n-3, \dots, 0, -1, -2)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = c_{-1}, \frac{\partial B}{\partial \alpha} = c_{-2}, \frac{\partial A}{\partial \beta} = c_0, \frac{\partial B}{\partial \beta} = c_{-1} \quad (*) \quad \text{とあらわすことができる。}$$

残った、多項式について 2 次式以上であれば同様の計算を繰り返し、1 次式が残ればその式を直接解くことにより、虚数解を含むすべての解を求めることができる。

(ただし、すべての問題に対してこの方法が適切に収束しないので使用には注意を要する。)

プログラムに関する注意

FORTRAN で配列を宣言するときに `a(-2:10)` と書くと、-2 から 10 まで添え字を使うことができる。

```
do while (n.ge.2)
```

```
  実行文 1
```

```
  n=n-2
```

```
  実行文 2
```

```
end do
```

とすることにより、 n が 2 以上の時に実行文 1 から実行文 2 のループを繰り返す。

レポートに関する注意

- 1、(*)で示した 4 式を導きなさい。
- 2、ベアストウ法のプログラムを完成しなさい。
- 3、与えられた二つの問題の解をプログラムを用いて解きなさい。

1, 2, 3 をまとめて提出すること。